4) اوجد قيم n بحيث S_n يقبل القسمة على 7

5) نضع $T_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$

برهن أن $S_n \equiv T_n [7]$ ثم استنتج قيم n بحيث T_n يقبل القسمة على 7

14 هل توجد اعداد صحيحة x ، y ، z بحيث $x^2-3y^2-4z=4$ ؟

15 - a رقم غير معدوم نضع $A=\overline{aaa}$ حيث A مكتوب في نظام التعداد ذو الأساس 10 برهن ان A يقبل القسمة على 37

16 . (γ) المنحنى البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(o; i; j)$

حيث $f(x)=\sqrt{x^2-17}$

- اوجد جميع النقط $M(x,y)$ من (γ) بحيث x و y طبيعيان .

17 . من أجل كل قضية عين الصحيحة والخاطئة لكل منها مع تبرير الاجابة

1) إذا كان $a = 3[49]$ فإن $a \equiv 3[7]$

2) إذا كان a و b عددان طبيعيان غير معدومين وإذا كان d قاسم المشترك لـ $3a+5b$ و $2a+3b$ فإن d يقسم $4b$

3) إذا كان r باقي قسمة a على q فإن r^2 هو باقي قسمة a^2 على q

الدرس 16

القواسم والمضاعفات والأعداد الأولية

1 . القاسم المشترك الأكبر

1.1 القواسم المشتركة لعددين طبيعيين

- من اجل كل عدد طبيعي a نرمز بـ $\mathscr{D}(a)$ إلى مجموعة قواسم a
- من اجل كل عددين طبيعيين a و b نرمز بـ $\mathscr{D}(a,b)$ إلى مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b وعليه $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(a)\cap\mathscr{D}(b)$

واضح ان $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(b,a)$

مثال .

$\mathscr{D}(36)=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$

$\mathscr{D}(40)=\{1,2,3,4,5 ,8,10,20,40\}$

$\mathscr{D}(36,40)=\mathscr{D}(36)\cap\mathscr{D}(40)=\{1,2,4\}$

2.1 القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و $\mathscr{D}(a,b)$ مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b.

المجموعة $\mathscr{D}(a,b)$ غير خالية لأنها تشمل دائما العدد 1

المجموعة $\mathscr{D}(a,b)$ منتهية ومحدودة من الأعلى لأن $\mathscr{D}(a)$ و $\mathscr{D}(b)$ منتهيتان ومحدودتان من الأعلى وعناصرها كلها أصغر او يساوي من a و b.

إذن المجموعة $\mathscr{D}(a,b)$ لها عنصر اكبر والذي نسميه بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .
نرمز بـ $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر .

ملاحظة

1) لمعرفة مجموعة القواسم السالبة للعدد a يكفي أخذ كل نظائر عناصر $\mathscr{D}(a)$
2) القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين يعرف بنفس الطريقة وعندئذ فإن قيمته هي القاسم المشترك الأكبر للعددين $|a|$ و $|b|$.

مثال -

$\mathscr{D}(36,40) = \{1,2,4\}$ ومنه $PGCD(36,40) = 4$
$\mathscr{D}(3,5) = \{1\}$ ومنه $PGCD(3,5) = 1$

نتيجة

1) مهما يكن العدد الطبيعي C فإن $\mathscr{D}(c,0) = \mathscr{D}(c)$
2) إذا كان a يقبل القسمة على b فإن b هو القاسم المشترك الأكبر لـ a و b
3) إذا كان $a=b$ فإن $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(a)$

تمرين تدريبي 1

n عدد طبيعي ، a و b عددان طبيعيان بحيث $a=n+4$ و $b=2n+3$
1) بين انه إذا قسم عدد طبيعي d العددين a و b فإنه يقسم 5 ، مستنتجا القيم الممكنة لـ $PGCD(a,b)$
2) أوجد حسب قيم n قيمة $PGCD(a,b)$

✓ الحل

1) بما أن d يقسم a و b يقسم b فإن d يقسم $2a$ ويقسم b
وبالتالي d يقسم $2a-b$ أي يقسم 5
وعليه القيم الممكنة لـ $PGCD(a,b)$ هي 1 و 5
2) الطريقة الأولى
نبحث عن قيم n بحيث $PGCD(a,b) = 5$
بما أن $d = 5$ فإن $a = 5k$ مع k عدد طبيعي غير معدوم
$a = 5k$ يكافئ $n+4 = 5k$ ومنه $n = 5k-4$
نعوض عبارة n في b نجد $b = 10k-5$
نلاحظ أن b موجب و قابل للقسمة على 5
إذن إذا كان $n = 5k-4$ مع k غير معدوم فإن $PGCD(a,b) = 5$
وإذا كان $n \neq 5k-4$ فإن $PGCD(a,b) = 1$

الطريقة الثانية
5 يقسم a هذا يعني أن $n+4 \equiv 0[5]$ أي $n \equiv 1[5]$
ومنه ينتج $n = 5k+1$ مع $k \in \mathbb{N}$
من أجل قيم n السابقة نجد $b \equiv 0[5]$
إذن إذا كان $n \equiv 1[5]$ فإن $PGCD(a,b) = 5$
وإذا كان غير ذلك فإن $PGCD(a,b) = 1$

تمرين تدريبي 2

a و b عددان طبيعيان حيث $a \geq 2b$
أ) بين أن $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b, a-2b)$
ب) باستعمال نتيجة السؤال أ) لعدة مرات استنتج خوارزمية تسمح بإيجاد $\mathscr{D}(66,30)$

✓ الحل

أ) - إذا كان d ينتمي إلى $\mathscr{D}(a,b)$ فإن d يقسم a و b
إذن d يقسم $a-2b$ و d يقسم b
وبالتالي d ينتمي إلى $\mathscr{D}(b, a-2b)$ .... (1)
- إذا كان d ينتمي إلى $\mathscr{D}(b, a-2b)$ فإن
d يقسم b و d يقسم $a-2b$ وبالتالي d يقسم $2b$ ويقسم $a-2b$
إذن d يقسم $a-2b+2b$ ويقسم b وبالتالي يقسم a و b
إذن d ينتمي إلى $\mathscr{D}(a,b)$ .... (2)
من (1) و (2) نجد $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b, a-2b)$
ب) نضع $a = 66$ و $b = 30$
$\mathscr{D}(66,30) = \mathscr{D}(30,6) = \mathscr{D}(6,18) = \mathscr{D}(18,6)$
$= \mathscr{D}(6,6) = \{1,6\}$

3.1 تعيين القاسم المشترك الأكبر باستعمال خوارزمية إقليدس

مبرهنة

القسمة الإقليدية لـ a على b تعطي $a = bq + r$ مع $b > r \geq 0$ عندئذ تكون القواسم المشتركة لـ a و b هي القواسم المشتركة لـ b و r
أي $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r)$ و كحالة خاصة إذا كان $r=0$ فإن :
$\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,0) = \mathscr{D}(b)$

الإثبات

لإثبات أن $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r)$ نبين أن كل عنصر من إحدى المجموعتين هو عنصر من الأخرى.
أ) لنبين أن كل قاسم c لـ a و b يقسم أيضا b و r .
بما أن c يقسم b فإنه يكفي أن نبين أن c يقسم r لكن $r = a-bq$

بما أن c يقسم a و b فإن c يقسم $a-bq$ وبالتالي يقسم r .

ب) لنبين أن كل قاسم d لـ b و r يقسم أيضا a و b لذلك يكفي أن نبين أنه يقسم a

لكن $a = bq + r$

بما أن d يقسم b و r فإن d يقسم أيضا a .

من أ) و ب) نستنتج أن $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r)$

خوارزمية إقليدس

a و b عددان طبيعيان.

إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a,b)=b$

إذا كان b لا يقسم a فإن البحث عن $\mathscr{D}(a,b)$ يؤدي بنا للبحث عن $\mathscr{D}(b,r)$.

بما أن $0 \leq r < b$ فإن القسمة الإقليدية لـ b على r تعطي $b = q_1 r + r_1$

وبالتالي $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r) = \mathscr{D}(r,r_1)$.

حيث $0 \leq r_1 < r$

القسمة الإقليدية لـ r على r_1 تعطي لنا $r = q_2 r_1 + r_2$

وبالتالي $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r) = \mathscr{D}(r,r_1) = \mathscr{D}(r_1,r_2)$

وهكذا دواليك طالما لا نتحصل على باقي قسمة معدوم

في مرحلة معينة سنتحصل بالتأكيد على باقي قسمة معدوم لأن البواقي المتتالية :

r ، r_1 ، r_2 ، r_3... هي أعداد موجبة متناقصة وعليه نتحصل على المساواة :

$\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r) = \mathscr{D}(r,r_1) = ... = \mathscr{D}(r_n,0)$

لكن $\mathscr{D}(r_n,0) = \mathscr{D}(r_n)$

إذن $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(r_n)$

بما أن r_n هو العنصر الأكبر في $\mathscr{D}(r_n)$ فإن r_n هو العنصر الأكبر في $\mathscr{D}(a,b)$

إذن $PGCD(a,b) = r_n$

نتيجة

1) إذا كان b لا يقسم a فإن القاسم المشترك الأكبر لـ a و b هو آخر باقي غير معدوم نتحصل عليه في خوارزمية إقليدس

2) مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين موجبين a و b هي مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر لهما ونكتب :

$\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(PGCD(a,b))$

مثال -

1) $a = 108$ ، $b = 24$

ومنه $PGCD(108,24) = 12$

الناتج	4	2
108	24	12
الباقي	12	0

2) $a = 187$ ، $b = 165$

ومنه $PGCD(187,165) = 11$

الناتج	1	7	2
187	165	22	11
البواقي	22	11	0

تمرين تدريبي 1

a و b عددان طبيعيان بحيث $a = 600$ و $PGCD(a,b) = 12$ و $260 < b < 300$. اوجد قيمة b

✓ الحل

12 يقسم b و $b = 12q$ مع q عدد طبيعي غير معدوم

$260 < b < 300$ يكافئ $260 < 12q < 300$

ومنه ينتج $21,66 < q < 25$

بما أن q عدد طبيعي فإن $q \in \{22, 23, 24\}$

- إذا كان $q = 22$ فإن $b = 264$ وفي هذه الحالة $PGCD(a,b) = 3$

إذن $q = 22$ مرفوضة

- إذا كان $q = 23$ فإن $b = 276$ وفي هذه الحالة $PGCD(a,b) = 12$

إذن $q = 23$ مقبولة.

- ذا كان $q = 24$ فإن $b = 288$ وفي هذه الحالة $PGCD(a,b) = 24$

إذن $q = 24$ مرفوضة.

إذن توجد قيمة وحيدة لـ b هي 276.

تمرين تدريبي 2

إذا قسمنا 4294 و 3521 على نفس العدد الطبيعي الموجب b نتحصل على الباقيين 10 و 11 على الترتيب. عين قيمة b .

✓ الحل

معطيات التمرين تترجم بـ $(I)\ ......\ \begin{cases} 4294 = bq + 10 \\ 3521 = bq' + 11 \end{cases}$

الجملة (I) تصبح $\begin{cases} 4284 = bq \\ 3510 = bq' \end{cases}$

إذن b يقسم 4284 ويقسم 3510 وبالتالي يقسم $PGCD(4284,3510)$

لكن $PGCD(4284,3510) = 18$ وعليه b ينتمي إلى $\{1,2,3,6,9,18\}$

وبما أن $11 < b$ فإن قيمة $b = 18$

2 . مبرهنة بيزو

تعريف

نقول عن عددين طبيعيين انهما اوليان فيما بينهما عندما يكون القاسم المشترك الأكبر لهما يساوي 1

ملاحظة

نستطيع تمديد هذا التعريف الى مجموعة الأعداد الصحيحة.

مثال -

5 و 3 اوليان فيما بينهما لأن $PGCD(3,5) = 1$

مثال -

11و 7 اوليان فيما بينهما لأن $PGCD(11,7) = 1$

مبرهنة

a و b عددان طبيعيان غير معدومان

القول ان a و b اوليان فيما بينهما يكافئ القول انه يوجد عددان صحيحان u و v

بحيث $au + bv = 1$

الإثبات

- نفرض انه يوجد عددان صحيحان u و v بحيث $au + bv = 1$

ونبرهن ان a و b اوليان فيما بينهما .

القاسم المشترك الأكبر d للعددين a و b يقسم $au + bv$

وبما أن $au + bv = 1$ فإن d يقسم 1 وبالتالي $d = 1$

إذن العددان a و b اوليان فيما بينهما .

- نفرض ان العددين a و b اوليان فيما بينهما ونبين أن $au + bv = 1$

لنعتبر E مجموعة كل الأعداد $au + bv$ مع u و v عددان صحيحان.

المجموعة E تشمل a لأن $a = 1 \times a + 0b$

إذن E تشمل اعداد صحيحة موجبة تماما.

ومن بين هذه الأعداد يوجد عدد أصغر من جميع الأعداد الأخرى نرمز له بـ $au_1 + bv_1$

ونضع $m = au_1 + bv_1$.

نبرهن ان m يقسم a و b ونستنتج أن $m = 1$.

قسمة a على m مع $m = au_1 + bv_1$ تعطي $a = (au_1 + bv_1)q + r$

ومنه $r = a(1 - qu_1) + b(-qv_1) = au + bv$

حيث u و v من $\mathbb{Z}$

إذن r عنصر من E و $m > r \geq 0$.

لكن m هو أصغر عنصر في E موجب تماما إذن $0 < r < m$ وهذا تناقض.

إذن $r = 0$ و m يقسم a

بنفس الطريقة نبين أن m يقسم b

وبالتالي m يقسم a و b وعليه m يقسم $PGCD(a,b)$

اي أن m يقسم 1 إذن $m = 1$

ملاحظة

لا يمكن استنتاج من المساواة $au + bv = c$ مع $c \neq 1$ أن a و b ليسا أوليان فيما بينهما.

مثلا $a = 5$ و $b = 2$

لدينا $5 \times 3 + 2(-4) = 7$ لكن 5 و 2 أوليان فيما بينهما.

مثال -

اثبت باستعمال نظرية بيزو ان 35 و 16 اوليان فيما بينهما.

✓ الحل

نضع $a = 35$ و $b = 16$

لكي نثبت أن $PGCD(35,16) = 1$ لابد من إيجاد عددين صحيحين u و v

بحيث $35u + 16v = 1$ ومن اجل ذلك نستعمل القسمة الإقليدية لـ 35 و 16

ونكتب في كل مرة الباقي على الشكل $au + bv$

$3 = a - 2b$ و $1 = b - 5(a - 2b)$ اي $1 = 11b - 5a$

إذن يوجد $(u,v) = (-5,11)$ بحيث $au + bv = 1$

وعليه فإن a و b اوليان فيما بينهما.

الناتج	2	5	3
35	16	3	1
الباقي	3	1	0

تمرين تدريبي 1

1) n عدد طبيعي. بين ان العددين $a = 3n + 1$ و $b = 2n + 1$ اوليان فيما بينهما

2) بين انه إذا كان a و b أوليان فيما بينهما $a + b$ أولي مع a و b

✓ الحل

لكي نبرهن أن عددين أوليين فيما بينهما نستعمل نظرية بيزو أو نفرض ان d قاسم مشترك لـ a و b ثم نبين أن $d = 1$

1) نبحث عن u و v من Z بحيث $au + bv = 1$

الفكرة للتخلص من n هي اختيار $u = -2$ و $v = 3$

وبالتالي نجد $-2a + 3b = 1$

إذن a و b أوليان فيما بينهما .

2) - الطريقة الأولى :

بما أن a و b أوليان فيما بينهما فإننا نستطيع كتابة $au+bv=1$ مع u و v عددين صحيحين .

المساواة $au+bv=1$ تكافئ $au+bu-bu+bv=1$ وهذه الأخيرة تكافئ $(a+b)u+b(v-u)=1$

وهذا ما يبين أن $a+b$ و b أوليان فيما بينهما.

نبين بنفس الطريقة أن $a+b$ و a أوليان فيما بينهما

- الطريقة الثانية :

نفرض أن d يقسم $a+b$ و b وبالتالي d يقسم $(a+b)-b$ أي يقسم a

إذن d يقسم a و b و بالتالي يقسم $PGCD(a,b)$ أي d يقسم 1

وعليه فالعددان $a+b$ و b أوليان فيما بينهما

بنفس الطريقة نبين أن $a+b$ و a أوليان فيما بينهما.

تمرين تدريبي ❷

1) بين أنه إذا كان عدد طبيعي a أولي مع عددين طبيعيين b و c فإنه أولي مع جداءهما.

2) استنتج أنه إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإن a^n و b^p أوليان فيما بينهما من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $p \geq 1$.

✓ الحل

1) بما أن a أولي مع كلا العددين الطبيعيين b و c

فإن وحسب نظرية بيزو توجد أعداد صحيحة u و v ، u' و v'

بحيث $au+bv=1$ و $au'+cv'=1$.

بضرب طرفي هاتين المساواتين نتحصل على :

$$a(auu'+cuv'+bvu')+(bc)(vv')=1$$

التي هي من الشكل $ax+(bc)y=1$ مع x و y صحيحان.

إذن حسب نظرية بيزو a و bc أوليان فيما بينهما .

2) وحسب السؤال 1) من أجل $c=b$ نتحصل على a أولي مع b^2

إذن a أولي مع b و b^2 أي أولي مع b^3

وهكذا نبرهن بالتراجع على أن a أولي مع b^p مع $p \geq 1$

- بما أن b^p أولي مع a فهو أولي مع a^2

إذن b^p أولي مع a و a^2 وبالتالي فهو أولي مع a^3

نبرهن بالتراجع على أن b^p أولي مع a^n .

❸ - خواص القاسم المشترك الأكبر

مبرهنة

a ، b ، g ثلاث أعداد طبيعية موجبة تماما.

القضايا الثلاث التالية متكافئة .

1) g هو القاسم المشترك الأكبر لـ a و b

2) g هو قاسم لـ a و b و الحاصلين a' و b' بحيث $a=ga'$ و $b=gb'$ أوليان فيما بينهما.

3) g هو قاسم لـ a و b ويوجد عددان صحيحان u و v بحيث $au+bv=g$

الإثبات

1) لنبين أن القضية (1) تستلزم القضية (2) :

نفرض أن g هو $PGCD$ لـ a و b ونبين أن الحاصلين a' و b' أوليان فيما بينهما.

إذا كان d قاسما مشتركا لـ a' و b' فإن $a'=dp$ و $b'=dq$ مع p و q طبيعيين

وعليه $a=dgp$ و $b=dgq$

إذن dg قاسم مشترك لـ a و b

لكن g هو القاسم المشترك الأكبر لـ a و b

وبالتالي يكون $d=1$ وعليه a' و b' أوليان فيما بينهما.

2) لنبين أن القضية (2) تستلزم القضية (3) :

نفرض أن g هو القاسم لـ a و b وأن الحاصلين $a'=\frac{a}{g}$ و $b'=\frac{b}{g}$ أوليان فيما بينهما.

إذن حسب نظرية بيزو يوجد عددان صحيحان u و v بحيث :

$$\frac{a}{g}u+\frac{b}{g}v=1$$

وبالضرب الطرفين في g نجد $au+bv=g$

3) لنبين أن القضية (3) تستلزم القضية (1) :

نفرض أن g قاسم لـ a و b ويوجد عددان صحيحان u و v

بحيث $au+bv=g$

ليكن g' القاسم المشترك الأكبر لـ a و b

بما أن g يقسم a و b فإنه يقسم g' لكن g' يقسم a و b

إذن g' يقسم $au+bv$ وبالتالي يقسم g وعليه $g'=g$

نتيجة

إذا كان g هو القاسم المشترك الأكبر لـ a و b فإنه مهما يكن العدد الطبيعي $c>0$ يكون لدينا gc هو القاسم المشترك الأكبر لـ ac و bc

و تكتب $PGCD(ac,bc)=c\,PGCD(a,b)=cg$

الإثبات

بما أن g يقسم a و b إذن gc يقسم ac و bc

للبرهان على أن gc هو القاسم المشترك الأكبر لـ ac و bc يكفي أن نبرهن أن gc يمكن كتابته على الشكل $gc = acu + bcv$

لدينا $g = au + bv$ وبالضرب في c نجد $gc = acu + bcv$

إذن gc هو القاسم المشترك الأكبر لـ ac و bc .

ـ وبنفس الطريقة نبرهن أنه إذا كان c يقسم a و b وبالتالي g فإن $\frac{g}{c}$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$.

تمرين تدريبي 1

- أوجد عددين طبيعيين a و b بحيث $a+b=114$ و $PGCD(a,b) = 8$

الحل

بما أن $PGCD(a,b) = 8$ فإن $a = 8a'$ و $b = 8b'$ و $PGCD(a',b') = 1$

نعوض a و b في المساواة $a + b = 114$ نجد $a' + b' = 18$

إذن $a' + b' = 18$ و $PGCD(a',b') = 1$.

الثنائيات (a',b') كما هي مبينة في الجدول التالي:

a'	1	5	7	13	17	11
b'	17	13	11	5	1	7

إذن $(a,b) \in \begin{cases}(8,136),(40,104),(56,88),(136,8)\\(104,40),(88,56)\end{cases}$

تمرين تدريبي 2

n عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر العددين a و b بحيث:

$a = 2n^2$ و $b = n(2n+1)$

بين أن $2n$ و $2n+1$ أوليان فيما بينهما، واستنتج أن n هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

الحل

بما أن يوجد عددان صحيحان $(u,v) = (-1,1)$ بحيث:

$(-1)(2n)+(1)(2n+1) = 1$ فإن حسب نظرية بيزو $2n+1$ و $2n$ أوليان فيما بينهما.

ـ بما أن $a=2n\ (n)$ و $b = (2n+1)n$ و $PGCD(2n+1, 2n)=1$

فإن n هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

تمرين تدريبي 3

g هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و c عدد طبيعي أولي مع b

بين أن g هو القاسم الأكبر للعددين ac و b .

الحل

g يقسم a و b إذن يقسم ac و b

بما أن g هو القاسم المشترك الأكبر لـ a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v بحيث:

$au + bv = g$ ....(1)

وبما أن b و c أوليان فيما بينهما فإنه يوجد u' و v' بحيث:

$bu' + cv' = 1$ .... (2)

بضرب طرفي المساوتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$(ac)(uv') + b(auu' + bvu' + cvv') = g$

وهذا يعني أن g هو القاسم المشترك الأكبر لـ ac و b.

4. تطبيقات القواسم

1.4 مبرهنة غوص

إذا كانت a ، b ، c أعداد طبيعية موجبة تماما بحيث a يقسم bc و a أولي مع b فإن a يقسم c .

الإثبات

ـ بما أن a و b أوليان فيما بينهما فإنه يوجد عددان صحيحان u و v بحيث:

$au + bv = 1$

وبالضرب طرفي المساواة الأخيرة فنجد $acu + bcv = c$

ـ بما أن a يقسم acu و bc فرضا فإنه يقسم bcv

إذن a يقسم المجموع $acu + bcv$ اي يقسم c.

نتيجة

إذا كان عدد طبيعي n يقبل القسمة على عددين أوليين فيما بينهما a و b فإنه يقبل القسمة على جداء هما .

الإثبات

من الفرضية نستطيع كتابة $n=ap$ و $n=bq$ مع p و q طبيعيان .

إذن ينتج $ap = bq$

وبما أن b يقسم ap و b أولي مع a فإنه يقسم p إذن $p=bp'$ مع p' عدد طبيعي

وعليه $n=abp'$ وهذا يعني أن n يقبل القسمة على ab

- بصفة عامة إذا كان n يقبل القسمة على الأعداد الأولية فيما بينها مثنى مثنى a_1 ، a_2 ، ..... ، a_n فإنه يقبل القسمة على الجداء $a_1 \times a_2 \times ..... \times a_n$

مثال- ♦

كل عدد يقبل القسمة على 2 و 5 فإنه يقبل القسمة على 10
لأن 2 و 5 أوليان فيما بينهما.

تمرين تدريبي

a ، b ، c ، d أربع أعداد بحيث a صحيح سالب والأخرى طبيعية موجبة تماما .
ومشكلة بهذا الترتيب متتالية حسابية أساسها أولي مع b .
أوجد هذه الأعداد علما أن $15b^2 = d - a$

✓ الحل

بما أن a ، b ، c ، d بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية أساسها r أولي مع b

فإن $b = a + r$ و $c = a + 2r$ و $d = a + 3r$

عندئذ فالمساواة $15b^2 = d - a$ تصبح $15b^2 = a + 3r - a = 3r$

بالقسمة على 3 نجد $5b^2 = r$ .... (I)

بما أن r أولي مع b فهو أولي مع b^2 .

بما أن r يقسم $5b^2$ و r أولي مع b^2 فإن r يقسم 5 (حسب غوص).

إذن r ينتمي إلى المجموعة $\{1, 5\}$

لكن $r \geq 5$ إذن $r = 1$ مرفوض وبالتالي الأساس هو 5 .

نعوض قيمة r في (I) نجد $b^2 = 1$ ومنه $b = 1$

إذن $a = b - r = -4$ و $c = b + r = 6$ و $d = c + r = 11$

2.4 الكسور غير القابلة للاختزال

نسمي كسرا كل عدد $\frac{a}{b}$ مع a و b عددان صحيحان و $b \neq 0$

(لا نأخذ بعين الاعتبار إلا الكسور الموجبة)

تعريف

إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فنقول عن الكسر $\frac{a}{b}$ أنه غير قابل للاختزال.

مبرهنة

كل كسر يساوي كسرا غير قابل للاختزال.

الإثبات

نعتبر كسرا $\frac{c}{d}$ ، وليكن g القاسم المشترك الأكبر لـ c و d

عندئذ $c = gc'$ و $d = gd'$ مع c' و d' أوليان فيما بينهما.

إذن وبالقسمة على g نتحصل على $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ و $\frac{c'}{d'}$ كسر غير قابل للاختزال

لأن c' و d' أوليان فيما بينهما.

ملاحظة

إذا كان $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ مع $\frac{a}{b}$ كسر غير قابل للاختزال فإنه يوجد عدد صحيح موجب k بحيث $c = ka$ و $d = kb$ وبحيث k القاسم المشترك الأكبر للعددين c و d

تمرين تدريبي

n و a عددان طبيعيان حيث $a = n(n+1)(n+5)$.
بين أن a يقبل القسمة على 6

✓ الحل

لكي نبين أن a يقبل القسمة على 6 يكفي أن نبين أنه يقبل القسمة على 2 وعلى 3 لأن 2 و 3 أوليان فيما بينهما.

ـ نثبت أولا أن 3 يقسم a :

في الجدول المقابل نبين باقي قسمة a على 3 .

من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد a يقبل القسمة على 3

باقي قسمة n على 3	0	1	2
باقي قسمة $n+1$ على 3	1	2	0
باقي قسمة $n+5$ على 3	2	0	1
باقي قسمة a على 3	0	0	0

- بما أن $n(n+1)$ زوجي فإن $n(n+1)(n+5)$ زوجي
ومنه نستنتج أن a يقبل القسمة على 2
- يمكننا استعمال بواقي قسمة n على 6 للبرهان على أن a يقبل القسمة على 6.

5. المعادلة $ax + by = c$

a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة.
المعادلة $ax_0 + by_0 = c$ حيث x و y مجهولان من $\mathbb{Z}$ تسمى معادلة ديوفنسيان.
نرمز بـ g إلى القاسم المشترك لـ a و b

مبرهنة

الشرط اللازم والكافي لكي يكون للمعادلة $ax + by = c$ .... (E) حلا هو أن يكون القاسم المشترك للعددين a و b يقسم c.

الإثبات

- لنفرض وجود حل لـ (E) ونبين عندئذ أن g يقسم c ؛
إذا كانت (x_0, y_0) حل لـ (E) فإن $ax_0 + by_0 = c$ لكن g يقسم a و b
إذن يقسم $ax_0 + by_0$ أي يقسم c.
- نفرض أن g يقسم c ونبين أنه توجد حلول للمعادلة $ax_0 + by_0 = c$
g يقسم a و b و c إذن نستطيع كتابة $a = ga'$ ، $b = gb'$ و $c = gc'$
مع a' ، b' ، c' أعداد طبيعية.
بتعويض a ، b ، c في المعادلة $ax + by = c$
نجد $ga'x + gb'y = gc'$ و بالقسمة على g نجد ؛
$a'x + b'y = c'$ ......(I)
لكن a' و b' أوليان فيما بينهما
إذن يوجد عددان صحيحان u و v بحيث $au' + bv' = 1$ (نظرية بيزو)
وبضرب طرفي هذه الأخيرة في c' نجد $a'uc' + b'vc' = c'$
مما يثبت أن الثنائية (x_0, y_0) بحيث $x_0 = uc'$ و $y_0 = vc'$
حل للمعادلة $a'x + b'y = c'$

نتيجة

إذا كانت (x_0, y_0) حل للمعادلة $ax + by = c$ فإن مجموعة الحلول
هي مجموعة لثنائيات (x, y) بحيث $x = x_0 + k\frac{b}{g}$ و $y = y_0 - k\frac{a}{g}$
مع k عدد صحيح و $a' = \frac{a}{g}$ و $b' = \frac{b}{g}$

الإثبات

- نفرض أن (x, y) حل فيكون لدينا $ax + by = c$ .... (1)
بما أن (x_0, y_0) هي حل للمعادلة فإن $ax_0 + by_0 = c$ .... (2)
بطرح (2) من (1) نجد $a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$
ومنه ينتج $a(x-x_0) = b(y_0-y)$ .... (3)
بقسمة طرفي المساواة (3) على g نتحصل على $a'(x-x_0) = b'(y_0-y)$ .... (4)
مع a' و b' أوليان فيما بينهما.
وحسب نظرية غوص فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث $y_0 - y = ka'$
ومنه $y = y_0 - ka'$
أي $y = y_0 - k\frac{a}{g}$
وبتعويض y في المعادلة (4) نجد $x - x_0 = kb'$
أي $x = x_0 + kb' = x_0 + k\frac{b}{g}$
وبالعكس إذا عوضنا قيمتي x و y في المعادلة $ax + by = c$ ستجدها محققة من أجل كل عدد صحيح k.

التفسير الهندسي لحلول المعادلة

في معلم متعامد ومتجانس للمستوي المعادلة $ax + by = c$ هي معادلة مستقيم d.
حل المعادلة $ax + by = c$ يؤول إلى البحث عن النقط من (d) بحيث تكون إحداثياتها صحيحة.

تمرين تدريبي

نعتبر المعادلة $13x + 19y = 4$ .... (E) حيث x و y عددان صحيحان
1) عين ثنائية من الأعداد الصحيحة (u, v) بحيث
$13u + 19v = 1$ مستنتجا حلا خاصا (x_0, y_0) للمعادلة (E)
2) عين كل الثنائيات من الأعداد الصحيحة التي هي حلول المعادلة (E)

الحل

1) بما أن 19 و 13 أوليان فيما بينهما فإن حسب نظرية بيزو توجد ثنائية (u, v) من الأعداد الصحيحة بحيث $13u + 19v = 1$
لتعيين u و v ننجز القسمة الإقليدية المتتابعة لـ 19 على 13 ثم نعبر في كل مرة عن الباقي بدلالة $13u + 19v$

$6 = 19 - 1 \times 13$
$1 = 1 \times 13 - 2 \times 6$
$1 = 1 \times 13 - 2 \times (19 - 1 \times 13)$

الناتج	1	2
19	13	6
الباقي	6	1

$1 = 1 \times 13 - 2 \times 19 + 2 \times 13$

$1 = 3 \times 13 - 2 \times 19$

ومنه نستنتج أن $(u, v) = (3, -2)$

لدينا $3 \times 13 - 2 \times 19 = 1$ وبضرب طرفي هذه المساواة في 4 نجد :

$12 \times 13 - 8 \times 19 = 4$

ومنه تكون $(x_0, y_0) = (12, -8)$ حلا خاصا للمعادلة (E)

2) (x, y) حلا للمعادلة (E) هذا معناه :

$13x + 19y = 4$ ....(1)

(x_0, y_0) حلا خاصا للمعادلة (E) هذا معناه:

$13x_0 + 19y_0 = 4$ ....(2)

بطرح (2) من (1) نجد $13(x - x_0) + 19(y - y_0) = 0$

ومنه $13(x - x_0) = 19(y_0 - y)$ ....(3)

13 يقسم $19(y_0 - y)$ و $PGCD(13, 19) = 1$ حسب نظرية غوص فإن 13 يقسم $y_0 - y$

13 يقسم $y_0 - y$ هذا معناه أن $y_0 - y = 13k$ مع k عدد صحيح

إذن $y = y_0 - 13k$

نعوض y في (3) نجد $(x - x_0) = 19k$ أي $x = x_0 + 19k$

بالتالي الثنائيات $(12 + 19k, -8 - 13k)$ هي حلول للمعادلة (E).

6. المضاعف المشترك الأصغر

تعريف

a و b عددان صحيحان موجبان تماما لهما على الأقل مضاعف مشترك موجب تماما والذي هو الجداء ab.

إذن مجموعة المضاعفات المشتركة لـ a و b غير خالية. ويوجد من بينها عنصرا موجبا تماما وأصغر من كل العناصر الأخرى والذي نسميه بالمضاعف المشترك الأصغر ونرمز له بـ $PPCM$

مبرهنة

إذا كان a و b عددان صحيحان موجبين تماما و g قاسمهما المشترك الأكبر و m مضاعفهما المشترك الأصغر فإن $mg = ab$.

وكل مضاعف مشترك لـ a و b هو مضاعف لـ m.

الإثبات

ليكن g القاسم المشترك الأكبر لـ a و b إذن $a = ga'$ و $b = gb'$

مع a' و b' أوليان فيما بينهما.

ليكن M مضاعف مشترك لـ a و b وعليه $M = ap$ و $M = bq$

مع p و q عددان طبيعيان.

إذن $M = ga'p = gb'q$ وبقسمة طرفي هذه المساواة على g نجد $a'p = b'q$

بما أن a' يقسم $b'q$ و a' و b' أوليان فيما بينهما فإنه وحسب نظرية غوص :

a' يقسم q أي $q = ka'$.

إذن $M = ba'k$ وبالتالي $M = \frac{ab}{g}k = a'b'gk$

- وبالعكس نبرهن أن كل عدد يكتب على $M = a'b'gk$ مضاعف مشترك لـ a و b

$M = k(ga')b' = kb'a$ وبنفس الطريقة نكتب $M = k(gb')a' = kba'$

ومنه نستنتج أن M مضاعف لـ a و b

وبالتالي فهو مضاعف مشترك لـ a و b

وعليه كل المضاعفات المشتركة لـ a و b هي مضاعفات للعدد $ga'b'$

وأصغرهم إذن هو $ga'b'$

إذن $m = ga'b'$ وعليه $mg = ab$

خاصية

a ، b ، m ثلاثة أعداد طبيعية

- القول أن m هو المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b يكافئ القول أن m هو مضاعف لـ a و b بحيث أن حاصلي قسمة m على a ، b أوليان فيما بينهما.

الإثبات

ليكن m المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b لدينا عندئذ $m = ga'b' = ab' = a'b$

حاصلي القسمة على الترتيب لـ m على a و b هما a' و b' أوليان فيما بينهما.

- وبالعكس ليكن M مضاعف مشترك لـ a و b بحيث أن العددين الطبيعيين $\frac{M}{a}$ و $\frac{M}{b}$ أوليان فيما بينهما.

حسب المبرهنة السابقة يكون M مضاعفا لـ m إذن يوجد عدد طبيعي k بحيث $M = km = kga'b'$

إذن حاصلي قسمة M على a و b هي على التوالي ka' و kb'

لكن هذان الحاصلان فرضا أوليان فيما بينهما.

إذن $k = 1$ وعليه $M = ga'b'$ والذي يمثل المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b

ملاحظة

إذا كان m المضاعف المشترك الأصغر للعددين الطبيعيين الموجبين تماما a و b فإنه من أجل كل عدد طبيعي c غير معدوم يكون mc هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين ac و bc

تمرين تدريبي ❶

أوجد كل الأعداد الطبيعية a و b بحيث يكون الفرق بين مضاعفهما المشترك الأصغر وقاسمهما المشترك الأكبر هو 6 .

✓ الحل

نسمي a و b هذين العددين حيث m المضاعف المشترك الأصغر لهما و g القاسم المشترك الأكبر لهما عندئذ $m - g = 6$ و $a = g a'$ و $b = g b'$

مع a' و b' أوليان فيما بينهما و $m = g a' b'$

بتعويض عبارة m في المساواة $m - g = 6$ نجد $g a'b' - g = 6$

ومنه $g(a'b' - 1) g = 6$

ومنه نستنتج أن g يقسم 6

إذن g ينتمي إلى $\{1,2,3,6\}$

g	1	2	3	6
$a'b'-1$	6	3	2	1
$a'b'$	7	4	3	2
a'	1 7	1 4	1 3	1 2
b'	7 1	4 1	3 1	2 1
a	1 7	2 8	3 9	6 12
b	7 1	8 2	9 3	12 6

ومنه فإن مجموعة الثنائيات (a,b) تنتمي إلى المجموعة

$\{(1,7), (7,1), (8,2), (2,8), (9,3), (3,9), (12,6), (6,12)\}$

تمرين تدريبي ❷

أوجد الأعداد الطبيعية a و b وحيث $a \langle b$ و $PGCD(a,b) = 15$ و $PPCM(a,b) = 105$

✓ الحل

بما أن $PGCD(a,b) = 15$ فإن $a = 15a'$ و $b = 15b'$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما

وبما أن $PPCM(a,b) = 105$ فإن $105 = 15a'b'$ أي $a'b' = 7$

وعليه نستنتج أن $a' = 1$ و $b' = 7$ لأن $a \langle b$

إذن $(a,b) = (15,105)$

❼. مجموعة الأعداد الأولية

تعريف

العدد الأولي هو عدد طبيعي أكبر تماما من الواحد و يقبل قاسمين الواحد ونفسه.

ملاحظة

1) p حيث $\mathscr{D}(p) = \{1, p\}$ عدد أولي.
2) العدد 1 ليس أوليا.
3) كل عدد طبيعي غير أولي له على الأقل قاسما يختلف عن 1 ونفسه.

مبرهنة

1- كل عدد طبيعي $a \geq 2$ يقبل عددا أوليا كقاسم له.
2- توجد ما لا نهاية من الأعداد الأولية.

تمرين تدريبي ❶

برهن أن كل عدد أولي p بحيث $p \rangle 2$ هو من الشكل $4n + 1$ أو $4n + 3$

✓ الحل

ليكن r باقي قسمة p على 4

إذن $p = 4n + r$ مع $r \geq 0$ $\rangle 4$

بما أن p أولي فإن $r \neq 2$ و $r \neq 0$ لأن :

لو كان $r = 0$ أو $r = 2$ فإن p يقبل القسمة على 4 أو على 2

إذن $p = 4n + 1$ أو $p = 4n + 3$

تمرين تدريبي ❷

a و b ، x ، y أعداد طبيعية موجبة تماما بحيث $xa + yb$ عدد أولي

بين أن a و b أوليان فيما بينهما.

✓ الحل

نضع $xa + yb = p$ لنبرهن بالخلف

إذا كان a و b ليسا أوليين فيما بينهما فإن لهما على الأقل قاسم أولي مشترك d .
لكن d يقسم a و b
إذن فهو يقسم $xa+yb$ أي يقسم p
لكن p أولي إذن $d = p$ ومنه نستنتج أن $d \rangle a$ وهذا خطأ
إذن a و b أوليين فيما بينهما.

8. تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية

مبرهنة 1

كل عدد طبيعي $n \geq 2$ أولي أو يساوي جداء أعداد أولية .

تعريف

تحليل عدد طبيعي n إلى جداء عوامل أولية هو كتابته على الشكل النموذجي
$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \times .....\times p_r^{\alpha_r}$
مع $p_1 \langle p_2 \langle .... \langle p_r$ و $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ أعداد طبيعية وهذا التحليل وحيد
عدد قواسم n هي $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)....(\alpha_r+1)$.

مبرهنة 2

n عدد طبيعي غير أولي، تحليله إلى جداء عوامل أولية هو $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \times .....\times p_r^{\alpha_r}$
وعندئذ فإن قواسمه هي كل الأعداد التي تكتب على الشكل $p_1^{\alpha'_1} p_2^{\alpha'_2} \times .....\times p_r^{\alpha'_r}$
مع $0 \leq \alpha'_i \leq \alpha_i$

تمرين تدريبي

عين $PPCM$ و $PGCD$ للعددين $a = 270$ و $b = 84$

الحل

لدينا $a = 2 \times 3^3 \times 5$ و $b = 2^2 \times 3 \times 7$
$PPCM(a,b)$ هو جداء كل العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليل العددين وبحيث يأخذ كل عامل بأس أكبر .
ومنه $PPCM(a,b) = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 7560$
$PGCD(a,b)$ هو جداء كل العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين وبأس أصغر
ومنه $PGCD(a,b) = 2 \times 3 = 6$

9. الأعداد الأولية وقابلية القسمة في $\mathbb{N}$

1.9 قابلية القسمة على عدد أولي

مبرهنة 1

p عدد أولي و a عدد طبيعي غير قابل للقسمة على p فيكون عندئذ p و a أوليين فيما بينهما.

مبرهنة 2

1) p عدد أولي يقسم الجداء ab عندئذ p يقسم a أو يقسم b
2) p عدد أولي يقسم الجداء ab حيث أن a و b أوليان عندئذ $p = a$ أو $p = b$

2.9 نظرية فيرما "fermat"

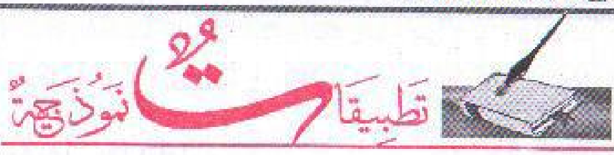
p عدد أولي و a عدد طبيعي غير قابل للقسمة على p عندئذ $(a^{p-1}-1)$ قابل للقسمة على p
وبصيغة أخرى $a^{p-1} \equiv 1[p]$ وبصفة عامة $a^p \equiv a[p]$

تمرين تدريبي

p عدد أولي يختلف عن 3، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $a_n = 3^{n+p} - 3^{n+1}$ قابلا للقسمة على p.

الحل

$a_n = 3^n(3^p - 3)$
بما أن p أولي و 3 لا يقبل القسمة على p
إذن نستطيع تطبيق مبرهنة فيرما.
$3^p = 3[p]$ ومنه $3^p - 3 = 0[p]$
إذن $3^n(3^p - 3) = 0[p]$ أي $a_n = 0[p]$



تطبيق 1 — تعيين $PGCD$ حسب قيم n

من أجل كل عدد طبيعي n موجب تماما نعتبر العددين :
$a=5n+1$ و $b=2n+1$ وليكن g قاسمهما المشترك الأكبر.
1- بين أن القيم المكنة لـ g هي 1 و 3.
2- أ) باستعمال جدول عين حسب بواقي قسمة n على 7 البواقي المكنة لقسمة $2n+1$ على 3.
ب) استنتج أنه من أجل أي قيمة لـ n فإن العدد b يقبل القسمة على 3.
جـ) تحقق من أجل قيم n الموجودة في السؤال ب) أن a يقبل القسمة على 3. ما هي قيمة g عندئذ ؟

✓ الحل

1) لدينا من الفرض $g = PGCD(a,b)$
بما أن g يقسم a و b فإن g يقسم $(5b-2a)$ أي g يقسم 3
إذن القيم المكنة لـ g هي 1 و 3

2) أ) بواقي قسمة $2n+1$ على 3 كما في الجدول الموالي :

بواقي قسمة n على 3	0	1	2
بواقي قسمة $2n+1$ على 3	1	0	2

إذن البواقي المكنة في $2n+1$ على 3 هي 0، 1، 2.
ب) من الجدول السابق نستنتج أنه إذا كان $n=3k+1$ مع $k \in IN$
فإن b يقبل القسمة على 3.
جـ) في حالة $n=3k+1$ نجد $a=15k+6$ أي $a=3(5k+2)$
بوضع $3k+2=k'$ يكون $a=3k'$
إذن a يقبل القسمة على 3.
بما أن a يقبل القسمة على 3 و b يقبل القسمة على 3 فإن :
$PGCD(a,b) \neq 1$ وبالتالي $g=3$



تطبيق 2 — استعمال نظرية بيزو لإثبات أن عددين أوليين فيما بينهما

a و b عددان طبيعيان غير معدومين بحيث $(a^2+ab-b^2)^2=1$
بين باستعمال نظرية بيزو أن a و b أوليان فيما بينهما.

✓ الحل

الطريقة الأولى :
من المساواة $(a^2+ab-b^2)^2=1$ ينتج $a^2+ab-b^2=1$ أو $a^2+ab-b^2=-1$
ـ إذا كان $a^2+ab-b^2=1$ فإننا نستطيع أن نكتب هذه المساواة على الشكل :
$a\times a+b(a-b)=1$
ومنه يوجد عددان صحيحان u و v
بحيث $au+bv=1$ مع $(u,v)=(a,a-b)$
وهذا يعني أن $PGCD(a,b)=1$.
ـ إذا كان $a^2+ab-b^2=-1$ فإننا نستطيع أن نكتب هذه المساواة على الشكل :
$(-a)\times a+b(a-b)=1$
ومنه يوجد عددان صحيحان* u و v
بحيث $au+bv=1$ مع $(u,v)=(-a,b-a)$
و هذا يعني أن $PGCD(a,b)=1$.

الطريقة الثانية :
نضع $g=PGCD(a,b)$
إذا كان g يقسم a و b فإن g يقسم a^2 و b^2 و ab
وبالتالي g يقسم $ab+a^2-b^2$
بما أن g يقسم a^2+ab-b^2 فإنه يقسم $(a^2+ab-b^2)^2$
أي g يقسم 1 وعليه $g=1$
إذن a و b أوليان فيما بينهما.

تطبيق 3 — استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين حل خاص لمعادلة

باستعمال القسمة الإقليدية عين ثنائية (x,y) الصحيحة بحيث :
$83x+13y=1$

✓ الحل

ننجز القسمة الإقليدية المتتابعة و في كل مرة نكتب الباقي على الشكل $au+bv$

الناتج	6	2	1	1
83	13	5	3	2
الباقي	5	3	2	1

$1 = 3 - 2$

$1 = 3 - (5 - 3\times 1) = 2\times 3 - 1\times 5$

$1 = 2\times(13 - 5\times 2) - 1\times 5 = (-5)(5) + 2\times 13$

$1 = (-5)(83 - 6\times 13) + 2\times 13 = (-5)(83) + 32(13)$

ومنه نستنتج ان $(u_0, v_0) = (-5, 32)$ حلا خاص للمعادلة المعطاة.

تطبيق 4 — قابلية القسمة وتعيين PGCD

من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ نعتبر العددين الطبيعيين a و b بحيث :
$b = 2n^2 - 7n - 4$ و $a = n^3 - n^2 - 12n$

1) بين ان a و b يقبلان القسمة على $(n-4)$
2) نضع $\alpha = 2n+1$ و $\beta = n+3$ وليكن d القاسم المشترك الاكبر لـ α و β
ا) اوجد علاقة بين α و β مستقلة عن n
ب) بين ان d قاسم لـ 5
جـ) بين ان العددين α و β مضاعفان للعدد 5 إذا وفقط إذا كان $(n-2)$ مضاعفا لـ 5.
3) بين ان $(2n+1)$ و n اوليان فيما بينهما.
4-ا) عين حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b.
ب) تحقق من النتائج المحصل عليها في حالة $n = 11$ و $n = 12$

الحل

1) من اجل $n = 4$ نجد $a = 0$ و $b = 0$
ومنه كل من a و b يقبلان القسمة على $(n-4)$
وعليه نكتب :
$a = n(n-4)(n+3)$ و $b = (n-4)(2n+1)$

2) لدينا $\alpha = 2n+1$ و $\beta = n+3$ و $d = PGCD(\alpha, \beta)$
ا) لايجاد علاقة مستقلة عن n تربط α و β لابد من التخلص من n
وبالتالي العلاقة التي تربط α و β هي $2\beta - \alpha = 5$
ب) بما ان d يقسم α و β فانه يقسم $2\beta - \alpha$ اي d يقسم 5
جـ) إذا كان α و β مضاعفين للعدد 5 فإن $\alpha - \beta$ مضاعف للعدد 5
اي $(n-2)$ مضاعف للعدد 5

وبالعكس إذا كان $(n-2)$ مضاعفا للعدد 5
فإن $n = 5k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}^*$
وبالتالي $\alpha = 10k + 5$ و $\beta = 5k + 5$
إذن يكون α و β مضاعفين للعدد 5.

3) بما ان $1(2n+1) + (-2)n = 1$
فانه وحسب نظرية بيزو $2n+1$ و n اوليان فيما بينهما.

4) ا) $PGCD(a,b) = (n-4)PGCD(n(n+3), 2n+1)$
ـ إذا كان $(n-2)$ ليس مضاعفا للعدد 5
فإن $(2n+1)$ أولي مع $n+3$ وأولي مع n
وبالتالي فهو أولي مع $n(n+3)$
وعليه $PGCD(n(n+3), 2n+1) = 1$
إذن $PGCD(a,b) = (n-4)\times 1 = n - 4$
ـ حالة $n - 2$ مضاعف للعدد 5:
نثبت ان $PGCD(n(n+3), 2n+1) = d$
بما ان d يقسم $2n+1$ و يقسم $n+3$ فانه يقسم $2n+1$ و $n(n+3)$
وبالتالي d يقسم $PGCD(n(n+3), 2n+1)$ ......(1)
إذا كان δ القاسم المشترك الاكبر للعددين $2n+1$ و $n(n+3)$
فإن δ يقسم (n أو $n+3$) و (δ يقسم $(2n+1)$)
وبما ان n و $2n+1$ اوليان فيما بينهما فإن δ لا يقسم n
وبالتالي يقسم $n+3$
إذن δ يقسم $2n+1$ ويقسم $n+3$
وبالتالي δ يقسم $PGCD((n+3), 2n+1)$ اي δ يقسم d .....(2)
من (1) و (2) نجد $\delta = d$
إذن $PGCD(a,b) = (n-4)\times d = 5(n-4)$
ب) في حالة $n = 11$ يكون $n - 2$ ليس مضاعفا للعدد 5
وبالتالي $PGCD(a,b) = 11 - 4 = 7$
في حالة $n = 12$ يكون $n - 2$ مضاعفا للعدد 5 وبالتالي
$PGCD(a,b) = 5(12-4)$
$= 40$

تطبيق 5 — PGCD ونظرية بيزو

a ، b ، A ، B أعداد طبيعية بحيث $A = 9a + 2b$ و $B = 7a + 5b$
1) بين انه إذا كان احد العددين A و B يقبل القسمة على 31 فإن الآخر يكون كذلك.

2) بين انه إذا كان a ، b أوليين فيما بينهما فإن القواسم المشتركة للعددين A و B هي 1 و 31.

✓ الحل

1) لدينا :

(1) .... $5A-2B=45a+10b-14a-10b=31a$

و (2) .... $9B-7A=63a+45b-63a-14b=31b$

- إذا كان A يقبل القسمة على 31 أي $A=31q$

فإن $2B=5\times 31q-31a$

وبالتبسيط نجد $2B=31(5q-a)$

بما ان 31 يقسم $2B$ و $PGCD(2,31)=1$ فإنه وحسب غوص 31 يقسم B .

- إذا كان B يقبل القسمة على 31 وباستعمال المساواة (2)

نستنتج ان A يقبل القسمة على 31

2) ليكن δ قاسم مشترك للعددين A و B

إذن δ يقسم $31a$ و يقسم $31b$

وبالتالي يقسم $PGCD(31a,31b)$

اي يقسم $31PGCD(a,b)$

لكن $PGCD(a,b)=1$

إذن δ يقسم 31.

ومنه فإن القواسم المشتركة للعددين A و B هي قواسم 31 وهي 1 ، 31

تطبيق 6 تطبيقات نظرية غوص

n و p عددان طبيعيان غير معدومين.

1) بين أن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 30.

2) بين أن الكتابة العشرية لـ n^p و n^{p+4} تنتهي بنفس الرقم.

✓ الحل

1) لكي يقبل العدد $n(n^4-1)$ القسمة على 30 يجب أن يقبل القسمة على 6 و 5 لأن 6 و 5 أوليان فيما بينهما.

بما ان $n(n^4-1)=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ و $(n-1)(n)(n+1)$ يقبل القسمة على 6 فإن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 6.

بواقي قسمة اي عدد طبيعي n على 5 هي 0، 1، 2، 3، 4.

والجدول التالي يلخص البواقي المكنة للعدد $n(n^4-1)$ على 5

بواقي قسمة n على 5	0	1	2	3	4
بواقي قسمة n^4-1 على 5	4	0	0	0	0
بواقي قسمة $n(n^4-1)$ على 5	0	0	0	0	0

ومن الجدول نستنتج أن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 5

إذن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 30

2) لكي ينتهي العددان n^p و n^{p+4} بنفس الرقم يجب أن يكون $n^{p+4}-n^p\equiv 0[10]$

لدينا $n^{p+4}-n^p=n^{p-1}(n^4-1)n$

بما أن $n(n^4-1)\equiv 0[30]$ فإن $n(n^4-1)\equiv 0[10]$

وبالتالي $n^{p-1}(n^4-1)n\equiv 0[10]$

تطبيق 7 حل المعادلات من الشكل $ax+by=c$ في $\mathbb{N}^2$

1) باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد حلا خاصا في $\mathbb{N}^2$ للمعادلة $-43x+18y=1$

2) استنتج من السؤال (1) حلا خاصا في $\mathbb{N}^2$ للمعادلة $-43x+18y=3$

3) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة $-43x+18y=3$

✓ الحل

1) ننجز القسمة الإقليدية لـ 43 على 18 وفي كل مرة نكتب البواقي على الشكل $au+bv$

1	1	2	2	الناتج
3	4	7	18	43
1	3	4	7	البواقي

$1=4-3\times 1$

$1=4-(7-1\times 4)=2\times 4-1\times 7$

$1=2(18-2\times 7)-1\times 7=(-5)\times 7+2\times 18$

$1=(-5)(43-2\times 18)+2\times 18=(-5)43+12\times 18$

ومنه نستنتج أن $(x,y)=(5,12)$ حل خاص للمعادلة $-43x+18y=1$

2) لدينا $(5)(-43)+12\times 18=1$ بضرب طرفي هذه المساواة في 3 نجد $15(-43)+36\times 18=3$

ومنه $(x_0,y_0)=(15,36)$ حل خاص للمعادلة $-43x+18y=3$

3) (1) ..... $-43x+18y=3$

(2) ...... $(-43)15+18\times 36=3$

بطرح (2) من (1) طرفا لطرف نجد $(-43)(x-15)+18(y-36)=0$

أي $43(x-15)=18(y-36)$ ...... (3)

بما أن 43 يقسم $18(y-36)$ و $PGCD(18,43)=1$

فإنه وحسب نظرية غوص 43 يقسم $y-36$

43 يقسم $y-36$ يعني يوجد عدد طبيعي k بحيث $y-36=43k$

أي $y=43k+36$ مع $k\in\mathbb{N}$

نعوض قيمة y في (3) نجد $x-15=18k$ ومنه $x=18k+15$

إذن الحلول العامة للمعادلة المعطاة هي الثنائيات (x,y) بحيث :

$(x,y)=(18k+15,43k+36)$ مع $k\in\mathbb{N}$



تطبيق 8 توظيف المعادلات لإيجاد زمن التطابق بين جسمين فضائيين

فلكي لاحظ جسمين A و B في الفضاء الخارجي يظهران بشكل دوري ،
حيث يظهر الجسم A كل 105 أيام بينما يظهر الجسم B كل 81 يوما.
في اليوم J_0 ظهر للفلكي الجسم A ثم ظهر له الجسم B بعد ستة أيام .
يريد الفلكي حساب (توقع) اليوم J_1 الذي يظهر فيه الجسمان معا.

1) ليكن u و v عدد الدورات التامة في الفترة $[J_0,J_1]$ للجسمين A و B على الترتيب.
بين أن الثنائية (u,v) حل للمعادلة (E_1) حيث $35x-27y=2$ ...... (E_1)

2 - أ) عين ثنائية (x_0,y_0) من الأعداد الصحيحة النسبية بحيث تكون حلا للمعادلة $35x-27y=1$

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E_1)

جـ) عين كل الحلول (u,v) للمعادلة (E_1)

3-أ) ما هو عدد أيام الفترة $[J_0,J_1]$ ؟

ب) إذا كان اليوم J_0 هو يوم الثلاثاء 7 ديسمبر 1999 فما هو بالضبط تاريخ اليوم J_1 علما أن السنة 2000 هي سنة كبيسة ؟

جـ) إذا تعذر على الفلكي الملاحظة في هذا الموعد فما هو عدد الأيام التي سينتظرها حتى يحدث الاقتران الموالي للجسمين A و B .

✓ الحل

1) كل دورة للجسم تمثل 105 يوما

إذن عدد أيام الفترة $[J_0,J]$ هي $105u$

وكل دورة للجسم B تمثل 81 يوما

إذن عدد أيام الفترة $[J_0+6\ ,\ J_1]$ هي $81v$

إذن عدد أيام الفترة $[J_0,J_1]$ هي $105u$ ومن جهة أخرى $81v+6$

وعليه نستنتج أن $105u=81v+6$ أي $105u=81v+6$

وبالقسمة على 3 نجد $35u-27v=2$

2) أ) باستعمال خوارزمية إقليدس نجد $(x_0,y_0)=(-10,-13)$

ب) بما أن (x_0,y_0) حل خاص للمعادلة $35x-27y=1$

فإن $(2x_0,2y_0)$ حل خاص للمعادلة (E_1)

إذن $(u_0,v_0)=(-20,-26)$

جـ) تعيين الحل العام للمعادلة (E_1) :

(E_1) ...... $35x-27y=2$

(E_1') ...... $35(-20)-27(-26)=2$

بطرح (E_1') من (E_1) طرفا لطرف نجد $35(x+20)-27(y+26)=0$ ...... (E_1)

أي $35(x+20)=27(y+26)$ ...... (E_1'')

35 يقسم $27(y+26)$ و 35 أولي مع 27

ومنه حسب غوص 35 يقسم $y+26$

وعليه $y+26=35k$ مع $k\in\mathbb{Z}$

أي $y=35k-26$

بتعويض y في (E_1'') نجد $x=27k-26$

إذن الحلول (u,v) تكون من الشكل $u=27k-26$ و $v=35k-26$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

3) أ) من أجل $k=1$ أي أول اقتران نجد $u=7$

ومنه طول الفترة $[J_0,J_1]$ هي $1+105\times7$ وهذا يساوي 736 يوما

ب) لدينا $J_1-J_0=735$ و $735\equiv0[7]$ إذن اليوم J_1 هو يوم الثلاثاء.

وبما أن $735=366+365+4$ فإن تاريخ J_1 هو سنتين وأربعة أيام بعد J_0

أي J_1 هو الثلاثاء 11 ديسمبر 2001 .

جـ) حتى نجد عدد أيام الانتظار للاقتران الثاني نحل المعادلة $105u=21v+0$

لأنه في هذه الحالة لا يوجد فرق في الأيام وبالتالي نحل المعادلة $35u=27v$

وبعد حل هذه المعادلة نجد :

$$\begin{cases}u=27k\\ v=35k\end{cases}$$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

من أجل $k=1$ نجد $u=27$ و $v=35$

وبالتالي عدد أيام الانتظار هي $81v=81\times35=105u=105\times27=2835$

تطبيق 9 تعيين نقاط من الفضاء إحداثياتها أعداد طبيعية

1) نعتبر المعادلة $(E)\ 6x+7y=57$ حيث x و y عددان صحيحان

أ) عين الثنائية من الأعداد الصحيحة (u,v) بحيث $6u+7v=1$
ثم استنتج حلا خاصا (x_0,y_0) للمعادلة (E)

ب) عين الثنائيات من الأعداد الصحيحة حلولا للمعادلة (E)

2) ليكن $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء
نعتبر المستوي (p) ذو المعادلة $6x+7y+8z=57$ ولنعتبر النقط من المستوي (p) التي تنتمي إلى المستوي $(o,\vec{i},\vec{j})$
بين أنه توجد نقطة واحدة من هذه النقط لها إحداثيات طبيعية عينها.
3) نعتبر نقطة M من المستوي (p) إحداثياتها (x,y,z)
حيث z، y، x أعداد طبيعية.
أ) بين أن y فردي.
ب) نضع $y=2p+1$ حيث p عدد طبيعي.
بين أن باقي القسمة الإقليدية للعدد $p+z$ على 3 يساوي 1.
جـ) نضع $p+z=3q+1$ حيث q عدد طبيعي
بين أن الأعداد الطبيعية q، p، x تحقق العلاقة $x+p+4q=7$
ثم استنتج أن q يأخذ القيمتين 0 أو 1
د) استنتج إحداثيات كل النقط من (p) التي إحداثياتها أعداد طبيعية.

✓ الحل

1) أ) بما أن $6\times(-1)+7(1)=1$ فإن الثنائية $(-1,1)$ حل خاص للمعادلة $6x+7y=1$
بضرب المساواة $6\times(-1)+7(1)=1$ في 57 نجد $6(-57)+7(57)=57$
ومنه نستنتج أن $(-57,57)$ حل خاص للمعادلة (E).
ب) المعادلة $6x+7y=57$ تكتب $6x+7y=6(-57)+7(57)$
ومنه ينتج $6(x+57)=7(57-y)$
بما أن 6 يقسم $7(57-y)$ و 6 و 7 أوليان فيما بينهما
فإن حسب نظرية غوص 6 يقسم $57-y$.
إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $57-y=6k$ أي $y=-6k+57$.
بتعويض عبارة y في (E) نجد $x=7k-57$
وبالعكس كل الثنائيات $(7k-57,57-6k)$ تحقق المعادلة (E)
إذن فهي حلول لـ (E)
إذن الثنائيات الصحيحة حلول للمعادلة (E) هي من الشكل $(7k-57,57-6k)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2) لتكن M نقطة من (p) وتنتمي أيضا إلى المستوي $(o,\vec{i},\vec{j})$ إحداثياتها (x,y,z)
تحقق المعادلتين $6x+7y+8z=57$ و $z=0$
إذن المسألة تؤول إلى إيجاد الحلول في $\mathbb{N}^2$ للمعادلة $6x+7y=57$.
وهذا يعني إيجاد العدد الصحيح k بحيث $\begin{cases}7k-57\geq 0\\ 57-6k\geq 0\end{cases}$ .....(I)
بعد حل الجملة (I) نجد $k=9$
إذن توجد نقطة وحيدة تحقق الشرطين إحداثياتها $(6,3,0)$

3) أ) M تنتمي إلى (p) تعني أن $6x+7y+8z=57$
وتعني أيضا $7y=57-6x-8z$
بما أن $-6x-8z$ زوجي
فإن $57-6x-8z$ فردي
وبالتالي $7y$ فردي وعليه y فردي.

ب) نضع $y=2p+1$ مع p عدد طبيعي.
العلاقة $6x+7y+8z=57$ تكتب عندئذ $6x+14p+8z=50$
لكن $6x\equiv 0[3]$ و $14p\equiv 2p[3]$ و $8z\equiv 2z[3]$ و $50\equiv 2[3]$
إذن ينتج $2p+2z\equiv 2[3]$
وبالقسمة على 2 نجد $p+z\equiv 1[3]$

جـ) نضع $p+z=3q+1$ مع $q\in\mathbb{N}$
من السؤال السابق $p+z$ يكتب على الشكل $3q+1$
إذن المساواة $6x+14p+8z=50$ تكتب $6x+14p+8(3q+1-p)=50$
وبالتبسيط نجد $x+p+4q=7$
وبما أن x و p و q أعداد طبيعية
فإن $x\geq 0$ و $p\geq 0$ و $q\geq 0$
إذن $4q\leq 7$ ومنه نستنتج $q=0$ أو $q=1$

د) من السؤال السابق لدينا $q=0$ أو $q=1$
ولدينا أيضا $x+p+4q=7$ ، $p+z=3q+1$ ، $y=2p+1$
- إذا كان $q=0$ فإن $x+p=7$ و $p+z=1$
وبالتالي $p=0$ أو $p=1$
لدينا إذن :
$(q=0$ و $p=0$ و $x=7$ و $z=1$ و $y=1)$
أو $(q=0$ و $p=1$ و $x=6$ و $Z=0$ و $y=3)$
وعليه توجد نقطتان هما $(7,1,1)$ و $(6,0,3)$
- إذا كان $q=1$ فإن $x+p=3$ و $p+z=4$ و $y=2p+1$
والجدول التالي يلخص جميع الحالات الممكنة لـ x ، y ، z ، p ،

x	3	2	1	0
p	0	1	2	3
z	4	3	2	1
y	1	3	5	7
(x,y,z)	(1,5,2)	(2,3,3)	(1,5,2)	(0,7,1)

إذن توجد 6 نقاط إحداثياتها أعداد طبيعية هي:

$(7,1,1)$ ، $(6,0,3)$ ، $(1,5,2)$ ،

$(2,3,3)$ ، $(1,5,2)$ ، $(0,7,1)$.

تطبيق ⑩ تعيين حلول معادلة $x^2+y^2=p^2$ حيث p عدد طبيعي

p عدد طبيعي معطى، نريد دراسة وجود ثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية الموجبة تماما تحقق المعادلة (E) ..... $x^2+y^2=p^2$

1- نضع $p=2$. بين أن المعادلة (E) ليس لها حلول.

نفرض أن $p\neq 2$ وأن (x,y) حل للمعادلة (E)

2- أ) بين أن x و y أحدهما زوجي و الآخر فردي

ب) بين أن x و y لا يقبلأن القسمة على p

جـ) استنتج أن x و y أوليان فيما بينهما

3) نفرض الأن أن p هو مجموع مربعين غير معدومين أي $p=u^2+v^2$ حيث u و v عددين طبيعيين موجبين تماما

أ) تحقق أن الثنائية $(|u^2-v^2|, 2uv)$ حل للمعادلة (E)

ب) أعط حلا للمعادلة (E) في حالة $p=5$ ثم لما $p=13$

4-أ) بين أن المعادلة (E) ليس لها حلول في حالة $p=3$ و $p=7$

ب) بين أن المعادلتين $x^2+y^2=9$ و $x^2+y^2=49$ لا تقبلأن حلولا من الأعداد الطبيعية الموجبة تماما .

✓ الحل

1) في حالة $p=2$ المعادلة (E) تكتب $x^2+y^2=4$

لكن $x>0$ و $y>0$

إذن $x^2<4$ و $y^2<4$ ومنه ينتج $x<2$ و $y<2$

وبالتالي الثنائية الوحيدة التي تحقق $2>x>0$ و $0<y<2$ هي $(1,1)$

ولكن $(1,1)$ لا تحقق المعادلة (E)

إذن (E) ليس لها حلولا في حالة $p=2$

2) أ) نفرض أن (x,y) حل للمعادلة (E) في حالة $p\neq 2$

إذن $x^2+y^2=p^2$ و $x>0$ و $y>0$

بما أن p أولي ويختلف عن 2 فإن p فردي وبالتالي p^2 فردي.

لدينا عندئذ x^2+y^2 فردي.

لكن مجموع عددين لهما نفس الشفعية هو عدد زوجي

إذن x^2 و y^2 أحدهما زوجي و الآخر فردي.

وبما أن العدد ومربعه لهما نفس الشفعية فإن x و y أحدهما زوجي والآخر فردي .

ب) لدينا $\begin{cases} x^2+y^2=p^2 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ إذن ينتج $\begin{cases} 0<x^2<p^2 \\ 0<y^2<p^2 \end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases} 0<x<p \\ 0<y<p \end{cases}$

إذن نستنتج أن x و y لا يقبلأن القسمة على p .

جـ) لتكن $d=PGCD(x,y)$ إذن d يقسم x و y

وبالتالي d^2 يقسم x^2 و y^2 وعليه d^2 يقسم p^2

ـ إذا كان $d^2=p^2$ فإن $d=p$ وهذا خطأ كون x و y لا يقبلأن القسمة على p

ـ إذا كان $d^2=p$ فإن p له قاسم آخر يختلف عن 1 وهذا خطأ لكون p أوليا.

ومنه نستنتج أن $d^2=1$ إذن $PGCD(x,y)=1$

3) أ) التحقق أن $(|u^2-v^2|, 2uv)$ حل لـ (E)

ـ إذا كان $p=u^2+v^2$ المعادلة (E) تكتب $x^2+y^2=(u^2+v^2)^2$

لكن $(|u^2-v^2|)^2+(2uv)^2=u^4-2u^2v^2+v^4+4u^2v^2$

أي $(|u^2-v^2|)^2+(2uv)^2=(u^2+v^2)^2$

ب) ـ إذا كان $p=5$ فإن $p=2^2+1^2$

إذن p من الشكل u^2+v^2 مع $u>0$ و $v>0$

الثنائية $(|2^2-1^2|, 2\times 2\times 1)$ حل لـ (E) من السؤال 3-أ)

إذن الثنائية $(3,4)$ حل خاص للمعادلة (E) .

ـ إذا كان $p=13$ فإن $p=3^2+2^2$ بنفس الطريقة السابقة نبين أن الثنائية $(5,12)$ حل للمعادلة (E)

4) أ) : $p=3$ و $p=7$ مجموع مربعين

نبحث هل توجد ثنائيات (u,v) من الأعداد الطبيعية بحيث $u^2+v^2=3$ مع $u>0$ و $v>0$.

لدينا عندئذ $3>u^2>0$ و $0<v^2<3$

وبالتالي توجد ثنائية وحيدة $(1,1)$ التي تحقق $3>u^2>0$ و $0<v^2<3$.

لكن $(1,1)$ لا تحقق المعادلة $u^2+v^2=3$

إذن المعادلة (E) ليس لها حلولا (أي 3 ليس مجموع مربعين).

ـ نبحث هل توجد ثنائيات (r,s) من الأعداد الطبيعية الموجبة تماما بحيث $r^2+s^2=7$

لدينا عندئذ $7>s^2>0$ و $0<r^2<7$

بما أن 7 فردي و s و r لهما شفعية مختلفة فإن الثنائيات الوحيدة هي $(1,2)$ و $(2,1)$

لكن $1^2+2^2\neq 7$

إذن المعادلة (E) ليس لها حلولا (أي 7 ليس مجموع مربعين).

ب) ـ نبحث عن الأعداد x و y بحيث $x^2+y^2=9$ و $x>0$ و $y>0$

لدينا إذن $0 < x^2 < 9$ و $0 < y^2 < 9$ ومنه ينتج $0 < x < 3$ و $0 < y < 3$

من السؤال 2) x و y لهما شفعية مختلفة

إذن الثنائيات الوحيدة هي $(1,2)$ و $(2,1)$ لكن $1^2 + 2^2 \neq 9$

إذن المعادلة $x^2 + y^2 = 9$ لا تقبل حلولا من الأعداد الطبيعية الموجبة تماما

ـ نبحث عن الأعداد x و y بحيث $x^2 + y^2 = 49$ و $x > 0$ و $y > 0$

لدينا إذن $0 < x^2 < 49$ و $0 < y^2 < 49$

ومنه ينتج $0 < x < 7$ و $0 < y < 7$

من السؤال 2) إذا كانت (x,y) حلولا لـ (E) فإن x و y لهما شفعية مختلفة وأوليان فيما بينهما وعليه الثنائيات التي تحقق هذه الشروط هي

$(2,5)$، $(3,1)$، $(3,4)$، $(4,1)$، $(4,3)$، $(4,5)$، $(5,2)$، $(5,4)$، $(5,6)$

$(1,2)$، $(1,4)$، $(1,6)$، $(2,1)$، $(2,3)$

نستطيع التحقق أنه ولا ثنائية من هذه الثنائيات تحقق المعادلة $x^2 + y^2 = 49$

إذن المعادلة $x^2 + y^2 = 49$ لا تقبل حلولا من الأعداد الطبيعية الموجبة تماما .

تمارين و مسائل

1

بين أنه يوجد على الأقل عددان صحيحان k و n بحيث $13k - 23n = 1$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $-156x + 276y = 24$

2

عين الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية بحيث $2m + 7d = 11$

حيث $d = PGCD(x,y)$ و $m = PPCM(x,y)$

3

1) عين $PGCD$ للعددين 2688 و 3024

2) في هذا السؤال x و y عددان صحيحان

أ) بين أن المعادلتين (1) و (2) متكافئتان

$2688x + 3024y = -3360$ ...... (1)

$8x + 9y = -10$ .... (2)

ب) تحقق أن الثنائية $(1,-2)$ حل خاص للمعادلة (2)

جـ) استنتج حلول المعادلة (2)

3) $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء، نعتبر المستويين (p) و (q) ذوي المعادلتين $x + 2y - z = -2$ و $3x - y + 5z = 0$ على الترتيب

أ) بين أن (p) و (q) متقاطعان في مستقيم (d) .

ب) بين أن إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2).

جـ) استنتج المجموعة (γ) للنقط من (d) بحيث تكون إحداثياتها أعداد صحيحة .

4

1- نعتبر المعادلة (E): $8x + 5y = 1$ حيث (x,y) ثنائية من الأعداد الصحيحة

أ) عين حلا خاصا للمعادلة (E)

ب) حل المعادلة (E)

2) N عدد طبيعي بحيث توجد ثنائية (a,b) من الأعداد الطبيعية تحقق :

$N = 8a+1$ و $N = 5b+2$

أ) بين أن الثنائية $(a , -b)$ حل للمعادلة (E)

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية لـ N على 40 ؟

3- أ) حل المعادلة $8x+5y=100$ حيث (x , y) ثنائية من الأعداد الصحيحة

ب) أرادت مجموعة من التلاميذ (بنات و ذكور) أن تشتري هدية لأستاذهم فدفعوا 100 قطعة نقدية ذات قيمة 100 دج.

الذكور دفعوا 8 قطع لكل واحد منهم والبنات 5 قطع لكل واحدة منهن.

ما هو عدد عناصر هذه المجموعة ؟

5

1) نعتبر المعادلة $(E): 6x+7y=57$ حيث (x , y) ثنائية صحيحة.

عين ثنائية من الأعداد الصحيحة (u , v) بحيث $6u+7v=1$

واستنتج حلا خاصا (x_0 , y_0) للمعادلة (E).

2) عين الثنائيات (x , y) من الأعداد الصحيحة حلول للمعادلة (E)

3) لدينا $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر المستوي (p) ذو المعادلة $6x+7y+8z = 57$ ولنعتبر النقط من المستوي (p) التي تنتمي أيضا إلى المستوي $(o, \vec{i}, \vec{j})$

بين أنه توجد نقطة وحيدة إحداثياتها أعداد طبيعية .ثم عين إحداثياتها.

6

1) عين كل الثنائيات (a , b) من الأعداد الطبيعية بحيث :

$8m = 105d+30$ مع $m = PPCM(a,b)$ و $d = PGCD(a,b)$

2)حل في IN^2 المعادلة $PPCM(x,y) - 9PGCD(x,y) = 13$

3) حل في IN^2 الجملتين التاليتين :

$\begin{cases} xy = 1690 \\ PPCM(x,y) = 130 \end{cases}$ و $\begin{cases} xy = 1350 \\ PPCM(x,y) = 90 \end{cases}$

7

n عدد صحيح كيفي و $a = n^3 - 2n + 5$ و $b = n+1$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح n لدينا $a = (n^2-n-1)b+6$

2) برهن أن $PPCM(a,b) = PGCD(b,6)$

3) من أجل أي قيمة n بحيث يكون $PGCD(a,b) = 3$

4) عين n بحيث يكون العدد $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا.

8

أوجد جميع الثنائيات (x , y) الصحيحة

بحيث $x+y=40$ و $PGCD(x,y) = 2$

2) بين أنه لا توجد أي نقطة ذات إحداثيات صحيحة على القطع الزائد ذو المعادلة :

$3x^2 - y^2 = 1$

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2} = Z$

9

P عدد أولي أكبر أو يساوي 7

الهدف من هذا التمرين هو إثبات أن $n = p^4 - 1$ يقبل القسمة على 240 ثم تطبيق هذه النتيجة.

1) باستعمال الموافقة بترديد 3 برهن أن n يقبل القسمة على 3 .

2) بملاحظة أن P فردي برهن أنه يوجد عدد طبيعي k بحيث :

$p^2 - 1 = 4k(k+1)$ ثم بين أن n يقبل القسمة على 16.

3) باستعمال الموافقة بترديد 5 برهن أن 5 يقسم n

4-أ) برهن أنه إذا كان a يقسم c و إذا كان b يقسم c مع a و b أوليان فيما بينهما .فإن ab يقسم c.

ب) استنتج من الأسئلة السابقة أن 240 يقسم n.

5) هل يوجد 15 عددا أوليا $p_1 , p_2 , ... , p_{15}$ أكبر من أو يساوي 7 بحيث العدد $A = P_1^4 + ... + P_{15}^4$ يكون أوليا .

10

نعتبر المتتاليتين (x_n) ، (y_n) المعرفتين على IN ب :

$x_0 = 1$ و $y_0 = 8$ و $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$

برهن بالتراجع أن النقط M_n ذات الإحداثيات (x_n , y_n) تقع على مستقيم (Δ) يطلب إعطاء معادلة له. ثم استنتج أن $x_{n+1} = 4x_n + 2$

2) برهن بالتراجع أن كل الأعداد x_n طبيعية، ثم استنتج أن كل الأعداد y_n طبيعية أيضا

3) برهن أن :

أ) x_n يقبل القسمة على 3 إذا وفقط إذا كان y_n يقبل القسمة على 3

ب) إذا كان x_n و y_n لا يقبلان القسمة على 3 فإنهما أوليان فيما بينهما .

4-1) برهن بالتراجع أن $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$

ب) استنتج أن $4^n \times 5 - 2$ مضاعف للعدد 3 من أجل كل عدد طبيعي n .

11

نعتبر المعادلة $138x - 55y = 5$ حيث $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1) برهن أنه إذا كانت الثنائية (x_0, y_0) حلا للمعادلة (E) فإن x_0 مضاعف للعدد 5

2) حل المعادلة (E)

3) ليكن (x_0, y_0) حلا للمعادلة (E) و نضع $d = PGCD(x_0, y_0)$

ما هي القيم الممكنة لـ d ؟

4) عين الحلول (x_0, y_0) للمعادلة (E) بحيث x_0 و y_0 أوليان فيما بينهما .

5) ليكن (Δ) مستقيم معادلته $138x - 55y = 5$

عين مجموعة النقط M من (Δ) ذات الإحداثيات (x, y) بحيث x و y أعداد صحيحة و OM^2 يقبل القسمة على 5 .

12

1) احسب بدلالة n مجموع n حد الأولى للأعداد الطبيعية غير المعدومة

2) باستعمال البرهان بالتراجع بين أن :

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = [1 + 2 + ... + n]^2$$

3) نضع $S_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$ عبر عن S_n بدلالة n

4) نضع $D_n = PGCD(S_{n+1}, S_n)$ احسب D_n

أ) في حالة n زوجي $(n = 2k)$

ب) في حالة n فردي $(n = 2k + 1)$

5) استنتج من أجل كل $n \geq 1$ أن D_n يختلف عن 1 وأن ثلاثة حدود متتابعة S_n ، S_{n+1} ، S_{n+2} للمتتالية (S_n) ليس لهم أي قاسم مشترك عدا 1 .

13

1) أوجد العدد الأولي p بحيث $17p + 1$ مربع تام

2) a و n عددان طبيعيان أكبر تماما من 1 و $a^n - 1$ أولي

برهن أن $a = 2$ و n أوليان.

14

لتكن الفرضية التالية "إذا كان p و $8p - 1$ أوليين فيما بينهما فإن $8p + 1$ ليس أولي"

1) تحقق أن هذه الفرضية صحيحة من أجل $p = 3$

2) برهن باستعمال الموافقة بترديد 3 أن الفرضية السابقة دوما صحيحة

15

1) برهن أن المعادلة $109x - 226y = 1$ ....(E) حيث (x, y) أعداد صحيحة،

لها كحلول الثنائيات الصحيحة من الشكل $(141 + 226k, 68 + 109k)$

حيث k عدد صحيح

ب) استنتج أنه يوجد عدد طبيعي وحيد d أصغر أو يساوي 226 وعدد طبيعي وحيد غير معدوم e بحيث $109d = 1 + 226e$ ، ثم حدد قيم d و e

2) برهن أن 227 عدد أولي.

3) نسمي A مجموعة الأعداد الطبيعية a بحيث $a \leq 226$

نعتبر الدالتين f و g من A في A المعرفتين كما يلي :

من أجل كل عدد a فإن الدالة f ترفق باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{109} على 227

من أجل كل عدد طبيعي a من A الدالة g ترفق باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{141} على 227

أ) تحقق أن $g(f(0)) = 0$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a من A يكون $a^{226} = 1[227]$

باستعمال 1- ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a من A يكون $g(f(a)) = a$

ماذا يمكن القول عن $g(f(a)) = a$ ؟